

Examen de admisión a la Maestría

26 de junio de 2009

1. Álgebra lineal

Resuelva todos los problemas de las primeras dos secciones.

1.1 Sea

$$H_t := \begin{pmatrix} \cos 2\pi t & \cos \frac{\pi}{6}t \\ \sin 2\pi t & \sin \frac{\pi}{6}t \end{pmatrix} \quad \text{para } t \in \mathbb{R}.$$

Calcule el rango de la matriz H_t para $0 \leq t < 12$. En particular, determine para que valores de t la matriz tiene rango 1.

1.2 Calcule el determinante de la siguiente matriz $n \times n$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 2 \end{pmatrix}$$

1.3 Sea $A : V \rightarrow V$ una transformación lineal de un espacio vectorial de dimensión 2, con un solo valor propio λ y sea E_λ el correspondiente subespacio de vectores propios. Muestre que $Aw - \lambda w \in E_\lambda$, para todo $w \in V$.

2. Cálculo

2.1 Determine si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ converge para $0 < x < 1$. En caso afirmativo, calcule el valor de la misma.

2.2 Demuéstrese que la función definida por

$$f(x) = x|x|, \quad x \in \mathbb{R}$$

es diferenciable para todo $x \in \mathbb{R}$ y que $f''(x)$ existe para todo $x \neq 0$, pero que $f''(0)$ no existe. Dibújese las gráficas de f, f', f'' .

2.3 ¿Cuál es la solución de

$$y'(t) = \frac{\sin t}{t},$$

que satisface $y(3) = -18$?

3. Problemas adicionales

3.1 Calcule la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4 + 1}.$$

3.2 Considere el espacio $C[0, 1]$ con la norma $\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$. Demuestre que la norma $\|\cdot\|_{\infty}$ no proviene de un producto interno.

3.3 ¿Cuántos grupos abelianos de orden 24 existen (salvo isomorfismos)?

3.4 Sea $SU(2)$ el grupo de matrices 2×2 sobre \mathbb{C} , unitarias con determinante 1:

$$SU(2) = \{A \in M_2(\mathbb{C}) \mid AA^* = I, \det A = 1\}$$

con la topología de subespacio de $M_2(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^4 \cong \mathbb{R}^8$ y $A^* = \overline{A}^t$. Pruebe que $SU(2)$ es homeomorfo a S^3 , la esfera unitaria en \mathbb{R}^4 .

3.5 ¿Cuáles de los siguientes espacios topológicos son homeomorfos entre sí? Justifique su respuesta.

- \mathbb{R}
- $(0, 1)$
- $[0, 1]$
- \mathbb{R}^2
- \mathbb{R}^3
- $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$