

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 3, стр. 362–383 (2006)

УДК 517.98

MSC 47B35

ДИНАМИКА СВОЙСТВ ТЕПЛИЦЕВЫХ ОПЕРАТОРОВ НА
ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ БЕРГМАНА

Н.Л. ВАСИЛЕВСКИЙ, С.М. ГРУДСКИЙ, А.Н. КАРАПЕТЯНЦ

АБСТРАКТ. This is a review paper based on the series of papers [4]-[7], devoted to a study of properties of Toeplitz operators with special symbols on weighted Bergman spaces in dependence of weight parameter. Here we consider a special weight connected with the natural Bergman metric. The weight parameter is denoted by λ and runs over $(-1, +\infty)$.

1. ВВЕДЕНИЕ

Теплицевы операторы и их модификации представляют собой широко изучаемый класс конкретных операторов. Исследования свойств теплицевых операторов на пространствах типа Бергмана, Харди, Дирихле составляют достаточно обширный список результатов в теории операторов и функциональных пространств.

Теплицевы операторы с гладкими (или непрерывными) символами, действующие на весовых пространствах типа Бергмана на диске (или в шаре в \mathbb{C}^n), естественно возникают в контексте задач математической физики. То же самое в равной степени относится и к C^* -алгебрам таких операторов. Упомянем только некоторые, близкие к данной теме, задачи математической физики. В первую очередь это квантовая деформация алгебры непрерывных функций на диске (см. [10]) и принцип квантования Березина [1] (в частности, на гиперболической плоскости).

VASILEVSKI, N.L., GRUDSKY, S.M., KARAPETYANTS, A.N. DYNAMICS OF PROPERTIES OF TOEPLITZ OPERATORS ON WEIGHTED BERGMAN SPACES.

© 2006 Василевский Н.Л., Грудский С.М., Карапетянц А.Н.

Василевский Н.Л. и Грудский С.М. поддержаны Мексиканским грантом CONACYT (грант 46936). Карапетянц А.Н. поддержан Российским фондом фундаментальных исследований (грант 06-01-00297-А).

Поступила 1 июня 2006 г., опубликована 20 ноября 2006 г.

Для каждого $\lambda > -1$ оператор Теплица $T_a^{(\lambda)}$ действует на весовом пространстве Бергмана \mathcal{A}_λ^2 . В процедуре квантования Березина (см., например, [1]) каждому оператору Теплица сопоставляется его символ Березина (или символ Вика) \tilde{a}_λ , и принцип соответствия означает, что

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \tilde{a}_\lambda(z) = a(z),$$

для гладких символов. Указанный предельный переход допускает трактовку и в более широком смысле (см. [9]).

В этой связи возникает важная проблема: изучение поведения различных свойств (ограниченность, компактность) оператора $T_a^{(\lambda)}$ в зависимости от λ , а также изучение поведения спектра при $\lambda \rightarrow +\infty$ и формирования предельного множества в соответствии со свойствами символа a .

Не представляется возможным получить достаточно полный ответ на указанную выше проблему в рамках общего класса (даже гладких) символов. В то же время недавно открытые случаи коммутативных *-алгебр теплицевых операторов на единичном диске подсказывают, что достаточно полный ответ на данную проблему можно дать в рамках следующих трех классов символов теплицевых операторов. Напомним в этой связи (см. [12, 13]), что все известные классы коммутативных *-алгебр операторов Теплица на единичном диске классифицируются пучком (гиперболических) геодезических следующих трех типов: геодезические, пересекающиеся в одной точке (эллиптический пучок), параллельные геодезические (параболический пучок) и непересекающиеся геодезические, т.е. все геодезические, ортогональные заданной (гиперболический пучок). Символы, являющиеся постоянными на циклах, т.е. траекториях ортогональных геодезическим, формирующих пучок, в каждом случае порождают коммутативную *-алгебру операторов Теплица. Кроме того, это свойство коммутативности не зависит от гладкости символов, которые могут быть просто измеримыми или даже мерами.

Модельный случай для эллиптического пучка - теплицевы операторы с радиальными символами на единичном диске. Этому случаю посвящена работа [5] (см. также [4] для случая единичного шара в \mathbb{C}^n). Два других случая, параболический и гиперболический, изучались соответственно в [6], [7]. В этих случаях мы переходим к реализации гиперболической плоскости через верхнюю полуплоскость и, таким образом, рассматриваем операторы Теплица (действующие на весовых пространствах Бергмана на верхней полуплоскости) с символами, зависящими только от $y = \text{Im } z$ и от $\theta = \text{arg } z$ соответственно.

Из этих модельных случаев общие случаи получаются применением преобразования Мебиуса и мы не будем на этом останавливаться.

Ключевым моментом при изучении символов, постоянных на соответствующих циклах, позволяющим извлекать значительно больше информации, чем в общем случае, является следующий факт. В каждом из трех модельных случаев коммутативной *-алгебры, порожденной операторами Теплица, сами операторы Теплица допускают некоторое специальное представление спектрального типа. Другими словами, они унитарно эквивалентны оператору умножения на некоторую последовательность в эллиптическом случае и на некоторую функцию на \mathbb{R}_+ и \mathbb{R} в параболическом и гиперболическом случаях соответственно.

Имеется, однако, существенная разница между эллиптическим случаем и двумя другими - параболическим и гиперболическим. В первом случае, например, оператор Теплица имеет дискретный спектр, в то время как в гиперболическом и параболическом случаях операторы Теплица имеют непрерывный спектр и не могут быть компактными (за исключением тривиального случая нулевого оператора).

В этой серии работ слово “динамика” связано с основной темой данного исследования: что происходит со свойствами оператора Теплица, действующего на весовом пространстве Бергмана, при изменении параметра веса.

Важной чертой операторов Теплица на (весовых) пространствах Бергмана является то, что эти операторы могут быть ограничены и даже компактны при неограниченных вблизи границы области символах. Мы изучаем ограниченность (в эллиптическом случае также и компактность) операторов Теплица с, вообще говоря, неограниченными символами. Приводим ряд достаточных и необходимых условий ограниченности (компактности) и также иллюстрируем соответствующие результаты на примерах.

Особое внимание уделено спектральным свойствам. Спектр каждого оператора Теплица $T_a^{(\lambda)}$ совпадает с замыканием последовательности или образа соответствующей функции. Для каждого фиксированного λ спектр не представляет собой множества, имеющего видимую связь с символом оператора. Определенная тенденция проявляется при λ стремящимся к бесконечности. Принцип соответствия подсказывает, что предельное множество спектров $M_\infty(a)$ должно быть связано с образом символа a . Это действительно так для непрерывных символов. Другими словами $M_\infty(a) = \text{Range } a$. Новые эффекты возникают при рассмотрении более сложных символов. Например, в случае кусочно-непрерывных символов предельное множество $M_\infty(a)$ совпадает с объединением множества $\text{Range } a$ и множества прямолинейных сегментов, соединяющих односторонние предельные точки разрывов.

Здесь мы не приводим результаты, касающиеся исчислению операторов Теплица в терминах символов Березина, опускаем достаточно детальное исследование принадлежности идеалам Шаттена для операторов Теплица в эллиптическом случае и многие другие факты, содержащиеся в [4]-[7]. Все это, а также большое количество примеров можно найти в указанных статьях.

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Пусть $d\mu(z) = \frac{1}{\pi} dx dy$, $z = x + iy$, $\lambda \in (-1, +\infty)$. Обозначим через \mathbb{D} единичный диск в \mathbb{C} и введем весовое гильбертово пространство $L_\lambda^2(\mathbb{D})$, состоящее из измеримых функций f на \mathbb{D} , для которых норма

$$\|f\|_{L_\lambda^2(\mathbb{D})} = \left(\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 d\mu_\lambda(z) \right)^{1/2}$$

конечна. Здесь обозначено

$$d\mu_\lambda(z) = (\lambda + 1)(1 - |z|^2)^\lambda d\mu(z).$$

Весовое пространство Бергмана $\mathcal{A}_\lambda^2(\mathbb{D})$ является замкнутым подпространством $L_\lambda^2(\mathbb{D})$, состоящим из аналитических функций. Ортогональный (весовой) проектор Бергмана $B_{\mathbb{D}}^{(\lambda)}$ пространства $L_\lambda^2(\mathbb{D})$ на $\mathcal{A}_\lambda^2(\mathbb{D})$ имеет вид

$$(B_{\mathbb{D}}^{(\lambda)} f)(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{(1 - z\bar{w})^{2+\lambda}} d\mu_\lambda(w).$$

Для измеримой на \mathbb{D} функции $a = a(z)$ (более точно условия на функцию a формулируются далее) оператор Теплица с символом a , не обязательно ограниченный, но определенный на плотном в $\mathcal{A}_\lambda^2(\mathbb{D})$ множестве, имеет вид:

$$T_a^{(\lambda)} : f \in \mathcal{A}_\lambda^2(\mathbb{D}) \longrightarrow B_{\mathbb{D}}^{(\lambda)} af \in \mathcal{A}_\lambda^2(\mathbb{D}).$$

Аналогично, обозначим через Π верхнюю полуплоскость в \mathbb{C} и введем весовое пространство $L_\lambda^2(\Pi)$, состоящее из измеримых функций f на Π , для которых норма

$$\|f\|_{L_\lambda^2(\Pi)} = \left(\int_{\Pi} |f(z)|^2 d\mu_\lambda(z) \right)^{1/2}$$

конечна. Здесь

$$d\mu_\lambda(z) = (\lambda + 1)(2\operatorname{Im} z)^\lambda d\mu(z).$$

Пусть далее $\mathcal{A}_\lambda^2(\Pi)$ обозначает весовое пространство Бергмана на полуплоскости, состоящее из аналитических на Π функций, принадлежащих $L_\lambda^2(\Pi)$.

Ортогональный (весовой) проектор Бергмана $B_{\Pi}^{(\lambda)}$ пространства $L_\lambda^2(\Pi)$ на $\mathcal{A}_\lambda^2(\Pi)$ имеет вид:

$$(B_{\Pi}^{(\lambda)} f)(z) = i^{\lambda+2} \int_{\Pi} \frac{f(w)}{(z - \bar{w})^{\lambda+2}} d\mu_\lambda(w).$$

Для функции (символа) $a = a(z)$, $z \in \Pi$ оператор Теплица, действующий на $\mathcal{A}_\lambda^2(\Pi)$, определяется аналогично предыдущему.

3. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВ БЕРГМАНА.

В данном разделе приведем представления весовых пространств Бергмана на диске и полуплоскости, необходимые в дальнейшем для изучения соответствующих операторов Теплица.

3.1. Представление пространства $\mathcal{A}_\lambda^2(\mathbb{D})$ в эллиптическом случае. Введем унитарный на

$$L_\lambda^2(\mathbb{D}) = L^2([0, 1], \frac{1}{\pi}(\lambda + 1)(1 - r^2)^\lambda r dr) \otimes L^2(S^1, \frac{dt}{it})$$

оператор

$$\begin{aligned} U_1 &= 1/\sqrt{\pi}(I \otimes \mathcal{F}) : L^2([0, 1], \frac{1}{\pi}(\lambda + 1)(1 - r^2)^\lambda r dr) \otimes L^2(S^1, \frac{dt}{it}) \\ &\longrightarrow L^2([0, 1], (\lambda + 1)(1 - r^2)^\lambda r dr) \otimes l^2 \\ &= l^2(L^2([0, 1], (\lambda + 1)(1 - r^2)^\lambda r dr)), \end{aligned}$$

где дискретное преобразование Фурье $\mathcal{F} : L^2(S^1, \frac{dt}{it}) \rightarrow l^2$ определяется следующим образом:

$$\mathcal{F} : f \rightarrow \{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}}, \quad c_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{S^1} f(t) \bar{t}^k dt, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Заметим, что $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{t}{2} \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{t}{r} \frac{\partial}{\partial t} \right)$, $z = rt$, $t \in S^1$. Действие оператора

$$U_1 \frac{t}{2} \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{t}{r} \frac{\partial}{\partial t} \right) U_1^{-1}$$

на пространстве $l^2(L^2([0, 1], (\lambda + 1)(1 - r^2)^\lambda r dr))$ осуществляется следующим образом:

$$\{c_n(r)\}_{n \in \mathbb{Z}} \rightarrow \{d_n(r)\}_{n \in \mathbb{Z}} = \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{n-1}{r} \right) c_{n-1}(r) \right\}_{n \in \mathbb{Z}}.$$

Образ $\mathcal{A}_{1,\lambda}^2(\mathbb{D}) = U_1(\mathcal{A}_\lambda^2(\mathbb{D}))$ является замкнутым подпространством пространства $l^2(L^2([0, 1], (\lambda + 1)(1 - r^2)^\lambda r dr))$, состоящим из последовательностей $\{c_n(r)\}_{n \in \mathbb{Z}}$, компоненты которых удовлетворяют уравнениям

$$U_1 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} U_1^{-1} \varphi = \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{n}{r} \right) c_n(r) = 0.$$

Данные уравнения имеют общее решение: $c_n(r) = c'_n r^n$. Каждая компонента $c_n(r)$ должна принадлежать $L^2([0, 1], (\lambda + 1)(1 - r^2)^\lambda r dr)$, что влечет $c_n(r) = 0$, $n < 0$. Итак, пространство $\mathcal{A}_{1,\lambda}^2(\mathbb{D})$ совпадает с пространством двусторонних последовательностей вида

$$c_n(r) = \begin{cases} \sqrt{2} d_{n,\lambda} c_n r^n, & n \in \mathbb{Z}_+ \\ 0, & n \in \mathbb{Z}_-, \end{cases}$$

где $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{Z}_- = \mathbb{Z} \setminus \mathbb{Z}_+$, $d_{n,\lambda} = [(\lambda + 1)B(n + 1, \lambda + 1)]^{-1/2}$, при этом

$$\|\{c_n(r)\}_{n \in \mathbb{Z}}\|_{\mathcal{A}_{1,\lambda}^2(\mathbb{D})} = \|\{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}\|_{l^2_+}.$$

Для каждого $n \in \mathbb{Z}_+$ определим унитарный оператор

$$u_{n,\lambda} : L^2([0, 1], (\lambda + 1)(1 - r^2)^\lambda r dr) \longrightarrow L^2([0, 1], r dr), \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

следующим образом:

$$(u_{n,\lambda} f)(r) = d_{n,\lambda}^{-1} \psi_{n,\lambda}^{-n}(r) f(\psi_{n,\lambda}(r)), \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

где функция $r = \psi_{n,\lambda}(t)$ является обратной к функции

$$\sigma_{n,\lambda}(r) = d_{n,\lambda} \left(2(\lambda + 1) \int_0^r \rho^{2n+1} (1 - \rho^2)^\lambda d\rho \right)^{1/2}$$

на $[0, 1]$. Обратный оператор

$$u_{n,\lambda}^{-1} = u_{n,\lambda}^* : L^2([0, 1], r dr) \longrightarrow L^2([0, 1], (\lambda + 1)(1 - r^2)^\lambda r dr)$$

имеет вид

$$(u_{n,\lambda}^{-1} f)(r) = d_{n,\lambda} r^n f(\sigma_{n,\lambda}(r)), \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Далее определим унитарный оператор

$$\begin{aligned} U_{2,\lambda} & : l^2(L^2([0, 1], (\lambda + 1)(1 - r^2)^\lambda r dr)) \longrightarrow l^2(L^2([0, 1], r dr)) \\ & = L^2([0, 1], r dr) \otimes l^2 \end{aligned}$$

следующим образом:

$$U_{2,\lambda} : \{c_n(r)\}_{n \in \mathbb{Z}} \rightarrow \{(u_{|n|,\lambda} c_n)(r)\}_{n \in \mathbb{Z}}.$$

Тогда пространство $\mathcal{A}_2^2(\mathbb{D}) = U_{2,\lambda}(\mathcal{A}_{1,\lambda}^2(\mathbb{D}))$ совпадает с пространством последовательностей $\{d_n(r)\}_{n \in \mathbb{Z}}$, где

$$d_n(r) = \begin{cases} u_{n,\lambda}(\sqrt{2}d_{n,\lambda}c_n r^n) = \sqrt{2}c_n & n \in \mathbb{Z}_+ \\ 0, & n \in \mathbb{Z}_-. \end{cases}$$

Пусть L_0 обозначает одномерное подпространство $L^2([0, 1], r dr)$, порожденное единичным элементом $\ell_0(r) = \sqrt{2}$. Обозначим через P_0 одномерный проектор $L^2([0, 1], r dr)$ на $L_0 : (P_0 f)(r) = \sqrt{2} \int_0^1 f(\rho) \sqrt{2} \rho d\rho$. Положим $l^2 = l_+^2 \oplus l_-^2$, где l_+^2, l_-^2 - подпространства (двустороннего) l^2 , состоящие из последовательностей, для которых $c_n = 0$ при $n \in \mathbb{Z}_-$ и $n \in \mathbb{Z}_+$ соответственно. Обозначим также через $p^+ = \chi_+(n)I, p^- = \chi_-(n)I$ ортогональные проекторы l^2 на l_+^2, l_-^2 , где $\chi_+(n), \chi_-(n)$ - характеристические функции множеств $\mathbb{Z}_+, \mathbb{Z}_-$.

Тогда $\mathcal{A}_2^2(\mathbb{D}) = L_0 \otimes l_+^2$ и ортогональный проектор B_2 пространства $L^2([0, 1], r dr) \otimes l^2$ на $L_0 \otimes l_+^2$ имеет вид $B_2 = P_0 \otimes p^+$.

Теорема 1. Пусть $\lambda \in (-1, +\infty)$. Унитарный оператор $U_\lambda = U_{2,\lambda}U_1$ осуществляет изометрический изоморфизм пространства $L_\lambda^2(\mathbb{D})$ на $L^2([0, 1], r dr) \otimes l^2$, при котором

1. Пространство Бергмана $\mathcal{A}_\lambda^2(\mathbb{D})$ отображается на $L_0 \otimes l_+^2$.
2. Проектор Бергмана $B_{\mathbb{D}}^{(\lambda)}$ унитарно эквивалентен проектору $P_0 \otimes p^+$.

Введем изометрическое вложение $R_0 : l_+^2 \rightarrow L^2([0, 1], r dr) \otimes l^2$ следующим образом: $R_0 : \{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+} \rightarrow \ell_0(r)\{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$, где $c_n = 0$ для $n \in \mathbb{Z}_-$.

Образ R_0 очевидно совпадает с пространством $L_0 \otimes l_+^2$. Сопряженный оператор $R_0^* : L^2([0, 1], r dr) \otimes l^2 \rightarrow l_+^2$ определяется следующим образом:

$$R_0^* : \{c_n(r)\}_{n \in \mathbb{Z}} \longrightarrow \left\{ \int_0^1 c_n(\rho) \sqrt{2} \rho d\rho \right\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$$

и

$$R_0^* R_0 = I : l_+^2 \longrightarrow l_+^2; \quad R_0 R_0^* = B_2 : L^2([0, 1], r dr) \otimes l^2 \longrightarrow L_0 \otimes l^2.$$

Далее, оператор $R_\lambda = R_0^* U_\lambda$ отображает пространство $\mathcal{A}_\lambda^2(\mathbb{D})$ на l_+^2 и его сужение $R_\lambda|_{\mathcal{A}_\lambda^2(\mathbb{D})} : \mathcal{A}_\lambda^2(\mathbb{D}) \longrightarrow l_+^2$ является изометрическим изоморфизмом. Сопряженный оператор $R_\lambda^* = U_\lambda^* R_0 : l_+^2 \rightarrow \mathcal{A}_\lambda^2(\mathbb{D}) \subset L_\lambda^2(\mathbb{D})$ является изометрическим изоморфизмом l_+^2 на $\mathcal{A}_\lambda^2(\mathbb{D})$, при этом

$$R_\lambda R_\lambda^* = I : l_+^2 \rightarrow l_+^2; \quad R_\lambda^* R_\lambda = B_{\mathbb{D}}^\lambda : L_\lambda^2(\mathbb{D}) \rightarrow \mathcal{A}_\lambda^2(\mathbb{D}).$$

Теорема 2. Изометрический изоморфизм $R_\lambda^* = U_\lambda^* R_0 : l_+^2 \rightarrow \mathcal{A}_\lambda^2(\mathbb{D})$ определяется соотношением

$$R_\lambda^* : \{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+} \longrightarrow \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} c_n d_{n,\lambda} z^n.$$

Обратный изоморфизм $R_\lambda : \mathcal{A}_\lambda^2(\mathbb{D}) \rightarrow l_+^2$ имеет вид

$$R_\lambda : \varphi \longrightarrow \left\{ d_{n,\lambda} \int_{\mathbb{D}} \varphi(z) \bar{z}^n d\mu_\lambda(z) \right\}_{n \in \mathbb{Z}_+}.$$

Приведенное ранее представление пространства Бергмана $\mathcal{A}_\lambda^2(\mathbb{D})$ в частности важно для изучения теплицевых операторов с символами $a = a(r)$, зависящими от $r = |z|$. Обозначим

$$(1) \quad \gamma_{a,\lambda}(n) = \frac{1}{\mathbb{B}(n+1, \lambda+1)} \int_0^1 a(\sqrt{r}) (1-r)^\lambda r^n dr, \quad n \in \mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

В дальнейшем считаем, что символ $a = a(r)$ таков, что интегралы в (1) имеют смысл.

Теорема 3. *Оператор Теплица $T_a^{(\lambda)}$ с радиальным символом $a = a(r)$, действующий на $\mathcal{A}_\lambda^2(\mathbb{D})$, унитарно эквивалентен оператору умножения $\gamma_{a,\lambda}I = R_\lambda T_a^{(\lambda)} R_\lambda^*$, действующему на l_+^2 . Последовательность $\{\gamma_{a,\lambda}(n)\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ задается равенством (1).*

Доказательство. Непосредственные вычисления дают

$$\begin{aligned} R_\lambda T_a^{(\lambda)} R_\lambda^* &= R_\lambda B_{\mathbb{D}}^\lambda a B_{\mathbb{D}}^{(\lambda)} R_\lambda^* = R_\lambda (R_\lambda^* R_\lambda) a (R_\lambda^* R_\lambda) R_\lambda^* = R_\lambda a R_\lambda^* \\ &= R_0^* U_{2,\lambda} U_1 a(r) U_1^{-1} U_{2,\lambda}^{-1} R_0 = R_0^* U_{2,\lambda} \{a(r)\} U_{2,\lambda}^{-1} R_0 \\ &= R_0^* \{\chi_+(n) a(\psi_{n,\lambda}(r))\} R_0. \end{aligned}$$

Далее, $R_0^* \{\chi_+(n) a(\psi_{n,\lambda}(r))\} R_0 \{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+} = \{\gamma_{a,\lambda}(n) c_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$. \square

Приведенная выше теорема позволяет рассматривать не только L^∞ -символы, но также и неограниченные символы.

Следствие 1. *Оператор Теплица $T_a^{(\lambda)}$ с символом $a(r)$ ограничен на $\mathcal{A}_\lambda^2(\mathbb{D})$ если и только если $\sup_{n \in \mathbb{Z}_+} |\gamma_{a,\lambda}(n)| < \infty$. Оператор $T_a^{(\lambda)}$ компактен на $\mathcal{A}_\lambda^2(\mathbb{D})$ если и только если $\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_{a,\lambda}(n) = 0$.*

Спектром ограниченного теплицева оператора $T_a^{(\lambda)}$ является множество $\text{sp } T_a^{(\lambda)} = \overline{\{\gamma_{a,\lambda}(n) : n \in \mathbb{Z}_+\}}$ и его существенный спектр $\text{ess-sp } T_a^{(\lambda)}$ совпадает с множеством всех предельных точек последовательности $\{\gamma_{a,\lambda}(n)\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$.

3.2. Представление пространства $\mathcal{A}_\lambda^2(\Pi)$ в параболическом случае. Здесь мы приведем представление пространства Бергмана $\mathcal{A}_\lambda^2(\Pi)$, полезное при изучении операторов Теплица с символами, зависящими от $y = \text{Im } z$. Это представление использует декартовы координаты на плоскости. Введем унитарный на $L_\lambda^2(\Pi)$ оператор

$$U_1 = 1/\sqrt{\pi}(F \otimes I) : L_\lambda^2(\Pi) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}, dx) \otimes L^2(\mathbb{R}_+, (\lambda+1)(2y)^\lambda dy),$$

где $F : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ -преобразование Фурье:

$$(Ff)(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-iux} f(x) dx.$$

Образ $\mathcal{A}_{1,\lambda}^2(\Pi) = U_1(\mathcal{A}_\lambda^2(\Pi))$ состоит из функций $\varphi = \varphi(x, y)$, удовлетворяющих уравнению

$$U_1 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} U_1^{-1} \varphi = \frac{i}{2} \left(x + \frac{\partial}{\partial y} \right) \varphi = 0,$$

общее решение которого имеет вид $\varphi(x, y) = \psi(x) e^{-xy}$. Заметим, что функция φ должна принадлежать $L^2(\mathbb{R}, dx) \otimes L^2(\mathbb{R}_+, (\lambda+1)(2y)^\lambda dy)$, поэтому $\mathcal{A}_{1,\lambda}^2(\Pi)$

состоит из всех функций вида

$$\varphi(x, y) = \chi_+(x)\theta_\lambda(x)f(x)e^{-xy}, \quad f \in L^2(\mathbb{R}),$$

где $\chi_+(x)$ - характеристическая функция полуоси \mathbb{R}_+ ,

$$\theta_\lambda(x) = \left(\frac{2x^{\lambda+1}}{(\lambda+1)\Gamma(\lambda+1)} \right)^{1/2}, \quad x \geq 0,$$

и, кроме того, $\|\varphi\|_{\mathcal{A}_{1,\lambda}^2(\Pi)} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}$. Введем унитарный оператор

$$U_{2,\lambda} : L^2(\mathbb{R}, dx) \otimes L^2(\mathbb{R}_+, (\lambda+1)(2y)^\lambda dy) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}, dx) \otimes L^2(\mathbb{R}_+, dy)$$

следующим образом

$$(U_{2,\lambda}\varphi)(x, y) = \frac{1}{\theta_\lambda(|x|)} e^{-y/2+|x|\beta(|x|,y)} \varphi(x, \beta(|x|, y)),$$

где для любого фиксированного $x > 0$ функция $\beta(x, y)$ является обратной к функции $\gamma(x, t) = \ln \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+1, 2xt)}$, т.е. $\beta(x, \gamma(x, t)) = t$, $x > 0$. Здесь $\Gamma(a, b)$ - неполная Γ функция.

Обратный оператор

$$U_{2,\lambda}^{-1} : L^2(\mathbb{R}, dx) \otimes L^2(\mathbb{R}_+, dy) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}, dx) \otimes L^2(\mathbb{R}_+, (\lambda+1)(2y)^\lambda dy)$$

имеет вид

$$(U_{2,\lambda}^{-1}\varphi)(x, y) = \theta_\lambda(|x|) e^{\gamma(|x|,y)/2-|x|y} \varphi(x, \gamma(|x|, y)).$$

Для любой функции $f \in L^2(\mathbb{R})$ имеем

$$U_{2,\lambda} : \chi_+(x)\theta_\lambda(x)f(x)e^{-xy} \longrightarrow \chi_+(x)f(x)e^{-y/2}.$$

Следовательно, образ $\mathcal{A}_2^2(\Pi) = U_{2,\lambda}(\mathcal{A}_{1,\lambda}^2(\Pi))$ состоит из функций вида $\psi(x, y) = \chi_+(x)f(x)e^{-y/2}$, $f \in L^2(\mathbb{R})$ и совпадает с пространством $L^2(\mathbb{R}_+, dx) \otimes L_0$, где L_0 - одномерное подпространство $L^2(\mathbb{R}_+, dy)$, порожденное $l_0(y) = e^{-y/2}$. Обозначим через P_0 одномерный проектор $L^2(\mathbb{R}_+, dy)$ на L_0 :

$$(P_0\psi)(y) = e^{-y/2} \int_{\mathbb{R}_+} \psi(v)e^{-v/2} dv.$$

Сформулируем вышесказанное в следующей теореме.

Теорема 4. Пусть $\lambda \in (-1, +\infty)$. Унитарный оператор $U_\lambda = U_{2,\lambda}U_1$ осуществляет изометрический изоморфизм пространства $L_\lambda^2(\Pi)$ на $L^2(\Pi) = L^2(\mathbb{R}, dx) \otimes L^2(\mathbb{R}_+, dy)$ при котором

1. Пространство Бергмана $\mathcal{A}_\lambda^2(\Pi)$ отображается на $L^2(\mathbb{R}_+) \otimes L_0$.
2. Проектор Бергмана $B_\Pi^{(\lambda)}$ унитарно эквивалентен проектору $\chi_+I \otimes P_0$.

Осуществим изометрическое вложение $R_0 : L^2(\mathbb{R}_+) \rightarrow L^2(\mathbb{R}) \otimes L^2(\mathbb{R}_+)$ по правилу $(R_0f)(x, y) = \chi_+(x)f(x)\ell_0(y)$. Здесь функция f продолжается нулем при $x < 0$. Образ R_0 очевидно совпадает с пространством $L^2(\mathbb{R}_+) \otimes L_0$. Сопряженный оператор $R_0^* : L^2(\Pi) \rightarrow L^2(\mathbb{R}_+)$ задается равенством

$$(R_0^*\varphi)(x) = \chi_+(x) \int_{\mathbb{R}_+} \varphi(x, \eta) \ell_0(\eta) d\eta$$

и

$$R_0^*R_0 = I : L^2(\mathbb{R}_+) \rightarrow L^2(\mathbb{R}_+); \quad R_0R_0^* = B_2 : L^2(\Pi) \rightarrow L^2(\mathbb{R}_+) \otimes L_0.$$

Далее, оператор $R_\lambda = R_0^* U_\lambda$ отображает пространство $L_\lambda^2(\Pi)$ на $L^2(\mathbb{R}_+)$ и сужение $R_\lambda|_{\mathcal{A}_\lambda^2(\Pi)} : \mathcal{A}_\lambda^2(\Pi) \rightarrow L^2(\mathbb{R}_+)$ является изометрическим изоморфизмом. Сопряженный оператор $R_\lambda^* = U_\lambda^* R_0 : L^2(\mathbb{R}_+) \rightarrow \mathcal{A}_\lambda^2(\Pi) \subset L_\lambda^2(\Pi)$ является изометрическим изоморфизмом пространства $L^2(\mathbb{R}_+)$ на $\mathcal{A}_\lambda^2(\Pi)$, при этом

$$R_\lambda R_\lambda^* = I : L^2(\mathbb{R}_+) \rightarrow L^2(\mathbb{R}_+); \quad R_\lambda^* R_\lambda = B_\Pi^{(\lambda)} : L_\lambda^2(\Pi) \rightarrow \mathcal{A}_\lambda^2(\Pi).$$

Теорема 5. *Изометрический изоморфизм $R_\lambda^* = U_\lambda^* R_0 : L^2(\mathbb{R}_+) \rightarrow \mathcal{A}_\lambda^2(\Pi)$ определяется равенством*

$$(R_\lambda^* f)(z) = \frac{1}{\sqrt{\Gamma(\lambda+2)}} \int_{\mathbb{R}_+} f(\xi) \xi^{\frac{\lambda+1}{2}} e^{iz\xi} d\xi.$$

Обратный изоморфизм $R_\lambda : \mathcal{A}_\lambda^2(\Pi) \rightarrow L^2(\mathbb{R}_+)$ определяется следующим образом:

$$(R_\lambda \varphi)(x) = \frac{x^{\frac{\lambda+1}{2}}}{\sqrt{\Gamma(\lambda+2)}} \int_\Pi \varphi(w) e^{-i\bar{w}x} d\mu_\lambda(w).$$

Как было отмечено, приведенное представление пространства Бергмана $\mathcal{A}_\lambda^2(\Pi)$ применяется при изучении теплицевых операторов с символами $a = a(y)$, зависящими от $y = \text{Im } z$. Обозначим

$$(2) \quad \gamma_{a,\lambda}(x) = \frac{x^{\lambda+1}}{\Gamma(\lambda+1)} \int_{\mathbb{R}_+} a(t/2) t^\lambda e^{-xt} dt, \quad x \in \mathbb{R}_+,$$

и в дальнейшем будем считать, что символ $a = a(y)$ таков, что интеграл в (2) имеет смысл.

Теорема 6. *Оператор Теплица $T_a^{(\lambda)}$ с символом $a = a(y)$, действующий на $\mathcal{A}_\lambda^2(\Pi)$, унитарно эквивалентен оператору умножения $\gamma_{a,\lambda} I = R_\lambda T_a^{(\lambda)} R_\lambda^*$, действующему на $L^2(\mathbb{R}_+)$. Функция $\gamma_{a,\lambda}(x)$ задается равенством (2).*

Следствие 2. *Оператор Теплица $T_a^{(\lambda)}$ с символом $a(y)$ ограничен на $\mathcal{A}_\lambda^2(\Pi)$ если и только если соответствующая функция $\gamma_{a,\lambda}(x)$ ограничена.*

3.3. Представление пространства $\mathcal{A}_\lambda^2(\Pi)$ в гиперболическом случае. Приведем описание весового пространства Бергмана $\mathcal{A}_\lambda^2(\Pi)$, связанное с полярными координатами:

$$L_\lambda^2(\Pi) = L^2(\mathbb{R}_+, r^{\lambda+1} dr) \otimes L^2([0, \pi], 1/\pi 2^\lambda (\lambda+1) \sin^\lambda \theta d\theta).$$

Перепишывая уравнение $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \varphi = 0$ в полярных координатах, получим, что пространство $\mathcal{A}_\lambda^2(\Pi)$ состоит из всех функций, удовлетворяющих $(r \frac{\partial}{\partial r} + i \frac{\partial}{\partial \theta}) \varphi(r, \theta) = 0$. Введем унитарный оператор

$$U_1 = 1/\sqrt{\pi} (M \otimes I) : L_\lambda^2(\Pi) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}) \otimes L^2([0, \pi], 2^\lambda (\lambda+1) \sin^\lambda \theta d\theta),$$

где преобразование Меллина $M : L^2(\mathbb{R}_+, r^{\lambda+1} dr) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ определяется следующим образом

$$(M\psi)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}_+} r^{-i\xi+\lambda/2} \psi(r) dr.$$

Легко видеть, что

$$U_1 \left(r \frac{\partial}{\partial r} + i \frac{\partial}{\partial \theta} \right) U_1^{-1} = i(\xi + (\lambda/2 + 1)i)I + i \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

Таким образом, образ пространства Бергмана $\mathcal{A}_{1,\lambda}^2(\Pi) = U_1(\mathcal{A}_\lambda^2(\Pi))$ может быть описан как (замкнутое) подпространство пространства

$$L^2(\mathbb{R}) \otimes L^2([0, \pi], 2^\lambda(\lambda + 1) \sin^\lambda \theta d\theta),$$

состоящее из функций $\varphi(\xi, \theta)$, удовлетворяющих уравнению

$$\left((\xi + (\lambda/2 + 1)i)I + \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \varphi(\xi, \theta) = 0,$$

общее решение которого, принадлежащее $L^2(\mathbb{R}) \otimes L^2([0, \pi], 2^\lambda(\lambda + 1) \sin^\lambda \theta d\theta)$, имеет вид

$$\varphi(\xi, \theta) = f(\xi) \vartheta_\lambda(\xi) e^{-(\xi + (1 + \lambda/2)i)\theta}, \quad f(\xi) \in L^2(\mathbb{R}),$$

где $\vartheta_\lambda(\xi) = \frac{|\Gamma(\frac{\lambda+2}{2} + i\xi)|}{\sqrt{\pi}\Gamma(\lambda+2)} e^{\pi\xi/2}$ и $\|\varphi\|_{\mathcal{A}_{1,\lambda}^2(\Pi)} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}$.

Теорема 7. Унитарный оператор $U_1 = 1/\sqrt{\pi}(M \otimes I)$ является изометрическим изоморфизмом $L_\lambda^2(\Pi)$, $\lambda \in (-1, +\infty)$ на $L^2(\mathbb{R}) \otimes L^2([0, \pi], 2^\lambda(\lambda + 1) \sin^\lambda \theta d\theta)$, при котором пространство Бергмана $\mathcal{A}_\lambda^2(\Pi)$ отображается на

$$\mathcal{A}_{1,\lambda}^2 = \left\{ \varphi(\xi, \theta) = f(\xi) \vartheta_\lambda(\xi) e^{-(\xi + (1 + \lambda/2)i)\theta} : f(\xi) \in L^2(\mathbb{R}) \right\}.$$

Пусть $R_{0,\lambda} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}) \otimes L^2([0, \pi], 2^\lambda(\lambda + 1) \sin^\lambda \theta d\theta)$ осуществляет изометрическое вложение по правилу

$$(R_{0,\lambda} f)(\xi, \theta) = f(\xi) \vartheta_\lambda(\xi) e^{-(\xi + (1 + \lambda/2)i)\theta}.$$

Образ $R_{0,\lambda}$ совпадает с $\mathcal{A}_{1,\lambda}^2(\Pi)$. Сопряженный оператор

$$R_{0,\lambda}^* : L^2(\mathbb{R}) \otimes L^2([0, \pi], 2^\lambda(\lambda + 1) \sin^\lambda \theta d\theta) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$$

имеет вид

$$(R_{0,\lambda}^* \psi)(\xi) = 2^\lambda(\lambda + 1) \vartheta_\lambda(\xi) \int_0^\pi \psi(\xi, \theta) e^{-(\xi - (1 + \lambda/2)i)\theta} \sin^\lambda \theta d\theta$$

и

$$\begin{aligned} R_{0,\lambda}^* R_{0,\lambda} &= I : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}), \\ R_{0,\lambda} R_{0,\lambda}^* &= B_{1,\lambda} : L^2(\mathbb{R}) \otimes L^2([0, \pi], 2^\lambda(\lambda + 1) \sin^\lambda \theta d\theta) \longrightarrow \mathcal{A}_{1,\lambda}^2, \end{aligned}$$

где $B_{1,\lambda} = U_1 B_\Pi^\lambda U_1^{-1}$ - ортогональный проектор пространства $L^2(\mathbb{R}) \otimes L^2([0, \pi], 2^\lambda(\lambda + 1) \sin^\lambda \theta d\theta)$ на $\mathcal{A}_{1,\lambda}^2$.

Далее, оператор $R_\lambda = R_{0,\lambda}^* U_1$ отображает пространство $L_\lambda^2(\Pi)$ на $L^2(\mathbb{R})$, и его сужение $R_\lambda|_{\mathcal{A}_\lambda^2(\Pi)} : \mathcal{A}_\lambda^2(\Pi) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ является изометрическим изоморфизмом. Сопряженный оператор $R_\lambda^* = U_1^* R_0 : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{A}_\lambda^2(\Pi) \subset L_\lambda^2(\Pi)$ является изометрическим изоморфизмом $L^2(\mathbb{R})$ на $\mathcal{A}_\lambda^2(\Pi)$, при этом

$$R_\lambda R_\lambda^* = I : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}); \quad R_\lambda^* R_\lambda = B_\Pi^{(\lambda)} : L_{2,\lambda}(\Pi) \longrightarrow \mathcal{A}_\lambda^2(\Pi).$$

Теорема 8. Изометрический изоморфизм $R_\lambda^* = U_1^* R_0 : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{A}_\lambda^2(\Pi)$ определяется равенством

$$(R_\lambda^* f)(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\mathbb{R}} z^{i\xi - (1 + \lambda/2)} \vartheta_\lambda(\xi) f(\xi) d\xi.$$

Обратный изоморфизм $R_\lambda : \mathcal{A}_\lambda^2(\Pi) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ определяется следующим образом

$$(R_\lambda \varphi)(\xi) = \frac{\vartheta_\lambda(\xi)}{\sqrt{2}} \int_{\Pi} (\bar{z})^{-i\xi - (1+\lambda/2)} \varphi(z) d\mu_\lambda(z).$$

Аналогично предыдущему, приведенное выше представление пространства Бергмана $\mathcal{A}_\lambda^2(\Pi)$ применяется при изучении операторов Теплица с символами $a = a(\theta)$, зависящими только от $\theta = \arg z$. Обозначим

$$(3) \quad \gamma_{a,\lambda}(\xi) = 2^\lambda (\lambda + 1) \vartheta_\lambda^2(\xi) \int_0^\pi a(\theta) e^{-2\xi\theta} \sin^\lambda \theta d\theta, \quad \xi \in \mathbb{R}$$

и считаем, что символ $a = a(\theta)$ таков, что интеграл в (3) имеет смысл.

Теорема 9. Оператор Теплица $T_a^{(\lambda)}$ с символом $a = a(\theta)$, действующий на $\mathcal{A}_\lambda^2(\Pi)$, унитарно эквивалентен оператору умножения $\gamma_{a,\lambda} I = R T_a^{(\lambda)} R^*$, действующему на $L^2(\mathbb{R})$. Функция $\gamma_{a,\lambda}(\xi)$ определяется равенством (3).

Следствие 3. Оператор Теплица $T_a^{(\lambda)}$ с символом $a(\theta)$ ограничен на $\mathcal{A}_\lambda^2(\Pi)$ если и только если соответствующая функция $\gamma_{a,\lambda}(\xi)$ ограничена.

4. ТЕПЛИЦЕВЫ ОПЕРАТОРЫ НА ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ БЕРГМАНА - ОГРАНИЧЕННОСТЬ И КОМПАКТНОСТЬ

Пусть \mathcal{A}_λ^2 обозначает весовое пространство Бергмана на диске или полуплоскости. Заметим, что для ограниченного символа $a(z)$ оператор Теплица $T_a^{(\lambda)}$ ограничен на любом \mathcal{A}_λ^2 , где $\lambda \in (-1, +\infty)$ и соответствующие нормы равномерно ограничены величиной $\sup_z |a(z)|$. Другими словами, пространства \mathcal{A}_λ^2 , где $\lambda \in (-1, +\infty)$, естественны для изучения операторов Теплица с ограниченными символами. Допуская неограниченные символы и желая иметь широкий класс символов для всех допустимых λ , всюду в дальнейшем будем рассматривать теплицевы операторы на \mathcal{A}_λ^2 при $\lambda \in [0, +\infty)$.

4.1. Эллиптический случай: операторы Теплица с радиальными символами на $\mathcal{A}_\lambda^2(\mathbb{D})$. Как было отмечено выше, каждый оператор Теплица $T_a^{(\lambda)}$ с радиальным символом $a = a(r)$, действующий на весовом пространстве Бергмана $\mathcal{A}_\lambda^2(\mathbb{D})$, унитарно эквивалентен оператору умножения $\gamma_{a,\lambda} I$, действующему на одностороннем пространстве l_+^2 . Последовательность $\gamma_{a,\lambda} = \{\gamma_{a,\lambda}(n)\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ определяется равенством (1).

В последующем мы рассмотрим символы $a(r)$, удовлетворяющие условию $a(\sqrt{r}) \in L^1(0, 1)$.

Сначала приведем достаточные условия ограниченности и компактности. Положим

$$B_{a,\lambda}^{(1)}(r) = \int_r^1 a(\sqrt{s})(1-s)^\lambda ds, \quad B_{a,\lambda}^{(j)}(s) = \int_r^1 B_{a,\lambda}^{(j-1)}(r) dr, \quad j = 2, 3, \dots$$

Теорема 10. Пусть $a(\sqrt{r}) \in L^1(0, 1)$. Если для $\lambda_0 \in [0, +\infty)$ и некоторого $j \in \mathbb{N}$ функция $B_{a,\lambda_0}^{(j)}(r)$ допускает следующее представление

$$(4) \quad B_{a,\lambda_0}^{(j)}(r) = O((1-r)^{j+\lambda_0}), \quad r \rightarrow 1,$$

то для любого $\lambda \in [0, +\infty)$ соответствующий оператор Теплица $T_a^{(\lambda)}$ ограничен на $\mathcal{A}_\lambda^2(\mathbb{D})$.

Если при указанных условиях имеет место представление

$$(5) \quad B_{a,\lambda_0}^{(j)}(r) = o((1-r)^{j+\lambda_0}), \quad r \rightarrow 1,$$

то для любого $\lambda \in [0, +\infty)$ соответствующий оператор Теплица $T_a^{(\lambda)}$ компактен на $\mathcal{A}_\lambda^2(\mathbb{D})$.

Следующее утверждение устанавливает частичный порядок, в котором выполняются условия приведенной выше теоремы.

Теорема 11. 1. Предположим, что условие (4) (условие (5)) выполняется для $j = j_0$ и некоторого λ_0 . Тогда условие (4) (условие (5)) выполняется для $j = j_0 + 1$ и того же λ_0 .

2. Предположим, что условие (4) (условие (5)) выполняется для $j = j_0$ и некоторого λ_0 . Тогда условие (4) (условие (5)) выполняется для $j = j_0$ и для $\lambda_1 \geq \lambda_0$.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим неограниченный символ (подробнее см. в [3])

$$(6) \quad a(r) = (1-r^2)^{-\beta} \sin(1-r^2)^{-\alpha},$$

где $\alpha > 0$ и $0 < \beta < 1$. Проверяя условия теоремы 10 последовательно для $j = 1, 2, \dots$ и $\lambda_0 = 0$, с учетом теоремы 11 получим, что соответствующий оператор Теплица компактен на каждом $\mathcal{A}_\lambda^2(\mathbb{D})$ для всех $\alpha > 0$ и $0 < \beta < 1$.

Отметим необходимость условий теоремы 10.

Теорема 12. Пусть $a(\sqrt{r}) \in L^1(0, 1)$.

1. Предположим, что $a(r) \geq 0$ и оператор $T_a^{(\lambda_1)}$ ограничен (компактен) на $\mathcal{A}_{\lambda_1}^2(\mathbb{D})$ для некоторого $\lambda_1 \geq 0$. Тогда условие (4) (условие (5)) выполнено для $j = 1$, $\lambda_0 = 0$, и оператор $T_a^{(\lambda)}$ ограничен (компактен) на $\mathcal{A}_\lambda^2(\mathbb{D})$ для каждого $\lambda \in [0, +\infty)$.

2. Предположим, что $B_{a,\lambda_2}^{(j)}(r) \geq 0$ для некоторого $j = j_0 \geq 1$ и $\lambda_2 \geq 0$ и оператор $T_a^{(\lambda_1)}$ ограничен (компактен) на $\mathcal{A}_{\lambda_1}^2(\mathbb{D})$ для некоторого $\lambda_1 \geq 0$. Тогда условие (4) (условие (5)) выполнено для $j = j_0 + 1$, $\lambda = \lambda_2$, и оператор $T_a^{(\lambda)}$ ограничен (компактен) на $\mathcal{A}_\lambda^2(\mathbb{D})$ для каждого $\lambda \in [0, +\infty)$.

Следствие 4. Пусть $a(\sqrt{r}) \in L^1(0, 1)$, и пусть $a(r) \geq 0$ или $B_{a,\lambda_0}^{(j)}(r) \geq 0$ для некоторого $j \in \mathbb{N}$ и $\lambda \geq 0$. Тогда оператор Теплица $T_a^{(\lambda)}$ ограничен (компактен) или неограничен (некомпактен) на всех $\mathcal{A}_\lambda^2(\mathbb{D})$ одновременно.

В этой связи упомянем, что в [14] аналогичное утверждение доказано для неотрицательных символов (в указанной работе операторы Теплица рассматриваются на весовых пространствах Бергмана на шаре в \mathbb{C}^n). Приведенное здесь заключение не ограничено только неотрицательными символами.

Следствие 5. Если $a(r) \geq 0$ и $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \inf_{r \in [1-\varepsilon, 1]} a(r) = \infty$, тогда оператор Теплица $T_a^{(\lambda)}$ неограничен на $\mathcal{A}_\lambda^2(\mathbb{D})$, $\lambda \geq 0$.

Достаточные условия теоремы 10 обеспечивают ограниченность (компактность) оператора Теплица $T_a^{(\lambda)}$ на $\mathcal{A}_\lambda^2(\mathbb{D})$ для всех $\lambda \in [0, +\infty)$. Теперь исследуем более тонкий вопрос об ограниченности и компактности оператора Теплица в зависимости от изменения параметра $\lambda \in [0, +\infty)$.

Теорема 13. Пусть $a(\sqrt{r}) \in L^1(0, 1)$ и оператор $T_a^{(\lambda_0)}$ ограничен (компактен) на $\mathcal{A}_{\lambda_0}^2(\mathbb{D})$ для некоторого λ_0 . Тогда оператор $T_a^{(\lambda)}$ ограничен (компактен) на $\mathcal{A}_{\lambda}^2(\mathbb{D})$ для каждого $\lambda \in [0, \lambda_0]$.

Замечание 1. Для произвольного символа $a(\sqrt{r}) \in L^1(0, 1)$ условия (4), (5) не являются, вообще говоря, необходимыми. Далее, с увеличением j эти условия становятся слабее. Однако, как показывает следующий результат, гипотеза, что каждый оператор Теплица $T_a^{(\lambda)}$ ($a = a(r)$), ограниченный (или компактный) на $\mathcal{A}_{\lambda}^2(\mathbb{D})$, будет удовлетворять условию (4) (или (5)) при некотором j является неверной.

Для символа $a = a(r)$ обозначим соответственно через $B(a)$ и $K(a)$ множество всех $\lambda \in [0, +\infty)$, для которых оператор Теплица $T_a^{(\lambda)}$ ограничен (компактен) на $\mathcal{A}_{\lambda}^2(\mathbb{D})$. Теорема 13 показывает, что множества $B(a)$ и $K(a)$ могут иметь следующий вид: (i) $[0, +\infty)$, (ii) $[0, \lambda_0)$, (iii) $[0, \lambda_0]$. Все указанные возможности могут быть реализованы. Например, в случае ограниченного символа $B(a) = [0, +\infty)$, а для непрерывного символа, удовлетворяющего $a(1) = 0$, имеем $K(a) = [0, +\infty)$.

Теорема 14. Существует семейство символов $a_{\nu, \beta}(r)$, $0 < \nu < 1$, $\beta \in \mathbb{R}$, для которого

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & B(a_{\nu, 0}) = [0, \nu], & K(a_{\nu, 0}) = [0, \nu], \quad \beta = 0, \\ \text{b)} & B(a_{\nu, \beta}) = [0, \nu], & K(a_{\nu, \beta}) = [0, \nu], \quad \beta > 0, \\ \text{c)} & B(a_{\nu, \beta}) = [0, \nu], & K(a_{\nu, \beta}) = [0, \nu], \quad \beta < 0. \end{array}$$

4.2. Параболический случай: операторы Теплица с символами, зависящими от $y = \operatorname{Im} z$ на $\mathcal{A}_{\lambda}^2(\Pi)$. Напомним, что функция (2) отвечает за ограниченность оператора Теплица с символом $a = a(y)$. Если символ $a = a(y) \in L^{\infty}(\mathbb{R}_+)$, то оператор $T_a^{(\lambda)}$ очевидно ограничен на $\mathcal{A}_{\lambda}^2(\Pi)$, и $\|T_a^{(\lambda)}\| \leq \operatorname{ess-sup} |a(y)|$. Легко видеть, что основной вклад в интеграл (2) для больших x ($x \rightarrow +\infty$) определяется поведением $a(y)$ в окрестности точки 0, а при малых x ($x \rightarrow 0$) - поведением $a(y)$ в окрестности $+\infty$. В частности, если для неотрицательного символа $a(y)$ либо $\lim_{x \rightarrow 0} \inf_{(0, x)} a(t/2) = \infty$, либо $\lim_{x \rightarrow +\infty} \inf_{(x/2, x)} a(t/2) = \infty$, то оператор Теплица $T_a^{(\lambda)}$ неограничен на каждом $\mathcal{A}_{\lambda}^2(\Pi)$, $\lambda \in [0, +\infty)$.

Как и в предыдущем случае, поведение некоторых средних символа играет существенную роль в изучении ограниченности соответствующего оператора.

Для локально суммируемой функции $a(y)$ введем следующие средние

$$B_{a, \lambda}^{(1)}(\xi) = \int_0^{\xi} a(t/2)t^{\lambda} dt, \quad B_{a, \lambda}^{(j)}(\xi) = \int_0^{\xi} B_{a, \lambda}^{(j-1)}(t) dt, \quad j = 2, 3, \dots$$

Обозначим через $L^1(\mathbb{R}_+, 0)$ класс функций $a(y)$, удовлетворяющих $a(y)e^{-\varepsilon y} \in L^1(\mathbb{R}_+)$ для любого $\varepsilon > 0$.

Теорема 15. Пусть $a(y) \in L^1(\mathbb{R}_+, 0)$. Если для $\lambda_0 \in [0, +\infty)$ и некоторого $j \in \mathbb{N}$ функция $B_{a, \lambda_0}^{(j)}(\xi)$ имеет следующую асимптотику

$$(7) \quad B_{a, \lambda_0}^{(j)}(\xi) = O(\xi^{j+\lambda_0}), \quad \xi \rightarrow 0$$

и

$$(8) \quad B_{a, \lambda_0}^{(j)}(\xi) = O(\xi^{j+\lambda_0}), \quad \xi \rightarrow +\infty,$$

тогда для каждого $\lambda \in [0, +\infty)$ соответствующий оператор Теплица $T_a^{(\lambda)}$ ограничен на $\mathcal{A}_\lambda^2(\Pi)$.

Примером неограниченного символа, порождающего ограниченный на любом $\mathcal{A}_\lambda^2(\Pi)$, $\lambda \in [0, +\infty)$ оператор Теплица, является функция $a(t/2) = t^{-\beta} \sin t^{-\alpha}$, где $0 < \beta < 1$, $\alpha > 0$.

Замечание 2. Условие (7) обеспечивает ограниченность функции $\gamma_{a,\lambda}(x)$ в окрестности точки $x = +\infty$, в то время как условие (8) обеспечивает ограниченность $\gamma_{a,\lambda}(x)$ в окрестности $x = 0$.

Замечание 3. Здесь мы опускаем формулировки теорем и утверждений, аналогичных теоремам 11, 12, 13, 14 и следствиям из этих теорем. Соответствующие результаты имеют место и формулируются аналогично с определенными изменениями.

4.3. Гиперболический случай: операторы Теплица с символами, зависящими от $\theta = \arg z$ на $\mathcal{A}_\lambda^2(\Pi)$. Напомним, что функция (3) отвечает за ограниченность оператора Теплица с символом $a(\theta)$. Если $a(\theta) \in L^\infty(0, \pi)$, то оператор $T_a^{(\lambda)}$ очевидно ограничен на $\mathcal{A}_\lambda^2(\Pi)$ для каждого λ и $\|T_a^{(\lambda)}\| \leq \text{ess-sup } |a(\theta)|$.

Для $a(\theta) \in L^1(0, \pi)$ функция $\gamma_{a,\lambda}(\xi)$ непрерывна в конечных точках $\xi \in \mathbb{R}$. Для больших ξ ($\xi \rightarrow +\infty$) экспонента $e^{-2\xi\theta}$ имеет очень выраженный максимум в точке $\theta = 0$, и, следовательно, основной вклад в интеграл, содержащий $a(\theta)$ в (3) для больших ξ определяется значениями $a(\theta)$ в окрестности точки 0. Аналогично, основной вклад для больших отрицательных ξ ($\xi \rightarrow -\infty$) определяется значениями $a(\theta)$ в окрестности точки π . В частности, если для неотрицательного символа $a(\theta)$ либо $\lim_{\sigma \rightarrow 0} \text{ess-inf}_{\theta \in (0, \sigma)} a(\theta) = \infty$, либо $\lim_{\sigma \rightarrow \pi} \text{ess-inf}_{\theta \in (\sigma, \pi)} a(\theta) = \infty$, то оператор Теплица $T_a^{(\lambda)}$ неограничен на каждом $\mathcal{A}_\lambda^2(\Pi)$, $\lambda \in [0, +\infty)$.

Аналогично предыдущему, поведение некоторых средних символа в существенной степени определяет картину ограниченности оператора Теплица. Для локально суммируемой функции $a(\theta)$ положим:

$$\begin{aligned} C_{a,\lambda}^{(1)}(\sigma) &= \int_0^\sigma a(\theta) \sin^\lambda \theta d\theta, & D_{a,\lambda}^{(1)}(\sigma) &= \int_\sigma^\pi a(\theta) \sin^\lambda \theta d\theta, \\ C_{a,\lambda}^{(j)}(\sigma) &= \int_0^\sigma C_{a,\lambda}^{(j-1)}(\theta) d\theta, & D_{a,\lambda}^{(j)}(\sigma) &= \int_\sigma^\pi D_{a,\lambda}^{(j-1)}(\theta) d\theta, \quad j = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Теорема 16. Пусть $a(\theta) \in L^1(0, \pi)$. Если для некоторого $\lambda_0 \in [0, +\infty)$ и $j_0, j_1 \in \mathbb{N}$ выполняются условия

$$(9) \quad C_{a,\lambda_0}^{(j_0)}(\sigma) = O(\sigma^{j_0 + \lambda_0}), \quad \sigma \rightarrow 0,$$

$$(10) \quad D_{a,\lambda_0}^{(j_1)}(\sigma) = O((\pi - \sigma)^{j_1 + \lambda_0}), \quad \sigma \rightarrow \pi,$$

то соответствующий оператор Теплица $T_a^{(\lambda)}$ ограничен на $\mathcal{A}_\lambda^2(\Pi)$ для каждого $\lambda \in [0, +\infty)$.

Примером неограниченного символа, порождающего оператор Теплица, ограниченный на любом $\mathcal{A}_\lambda^2(\Pi)$, $\lambda \in [0, +\infty)$, является функция $a(\theta) = (\sin \theta)^{-\beta} \sin[(\sin \theta)^{-\alpha}]$, где $0 < \beta < 1$, $\alpha > 0$.

Замечание 4. Здесь, как и в предыдущем случае, мы опускаем формулировки теорем и утверждений, аналогичных теоремам 11, 12, 13, 14 и следствиям из этих теорем. Соответствующие результаты имеют место и формулируются аналогично с необходимыми изменениями.

5. ДИНАМИКА ПОВЕДЕНИЯ СПЕКТРА ОПЕРАТОРОВ ТЕПЛИЦА

Пусть E подмножество \mathbb{R} , имеющее $+\infty$ в качестве предельной точки, и для каждого $\lambda \in E$ существует множество $M_\lambda \subset \mathbb{C}$. Определим M_∞ как множество всех $z \in \mathbb{C}$, для которых существует последовательность комплексных чисел $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ такая, что

- (i) для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует $\lambda_n \in E$ такое, что $z_n \in M_{\lambda_n}$,
- (ii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n = +\infty$,
- (iii) $z = \lim_{n \rightarrow +\infty} z_n$.

Будем писать $M_\infty = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} M_\lambda$ и называть M_∞ (частичным) пределом семейства $\{M_\lambda\}_{\lambda \in E}$.

В случае когда E дискретное множество с единственной предельной точкой - бесконечностью, приведенное выше определение совпадает с определением частичного предельного множества, введенным в [8]. Можно показать, что $M_\infty = \bigcap_\lambda \overline{\bigcup_{\mu \geq \lambda} M_\mu}$. Заметим, что $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} M_\lambda = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \overline{M_\lambda}$.

В каждом из трех рассматриваемых в данной статье случаев для оператора Теплица $T_a^{(\lambda)}$ с символом a , полагая $M_\lambda(a) = \text{Range } \gamma_{a,\lambda}$, имеем

$$\text{sp } T_a^{(\lambda)} = \overline{M_\lambda(a)}.$$

Заметим, что для оператора Теплица с L^∞ -символом имеем ([1]):

$$(11) \quad \text{sp } T_a^{(\lambda)} \subset \text{conv}(\text{ess-Range } a), \quad a \in L^\infty(\mathbb{D}), \quad \lambda > -1.$$

Основной целью настоящего пункта является исследование предельного множества и его связи с символом оператора. Поскольку формулировки соответствующих теорем идентичны во всех трех случаях, мы приводим теоремы только в эллиптическом случае. В двух других случаях ограничимся несколькими примерами.

5.1. Эллиптический случай.

5.1.1. Непрерывные символы.

Теорема 17. Пусть $a = a(r) \in C[0, 1]$. Тогда

$$(12) \quad \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \text{sp } T_a^{(\lambda)} = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} M_\lambda(a) = \text{Range } a.$$

Очевидно, множество $\text{Range } a$ совпадает со спектром $\text{sp } aI$ оператора умножения на $a = a(r)$, действующего, скажем, на любом $L_\lambda^2(\mathbb{D})$, поэтому другая запись (12) имеет вид

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \text{sp } T_a^{(\lambda)} = \text{sp } aI.$$

Напомним, что для непрерывного символа $a(r)$ и для каждого фиксированного λ спектр $\text{sp } T_a^{(\lambda)}$ совпадает с замыканием множества $\gamma_{a,\lambda} = \{\gamma_{a,\lambda}(n)\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$, то есть является дискретным множеством с единственной предельной точкой $a(1)$. Определенная тенденция в поведении последовательности $\gamma_{a,\lambda}$ проявляется когда λ стремится к $+\infty$, и предельное множество $M_\infty(a)$ совпадает с образом символа $a(r)$.

Проиллюстрируем этот эффект на примере символа $a(r) = (1 + (\frac{9}{10}i - 1)r^2)^4$ для трех значений λ : $\lambda = 0$, $\lambda = 5$ и $\lambda = 100$.

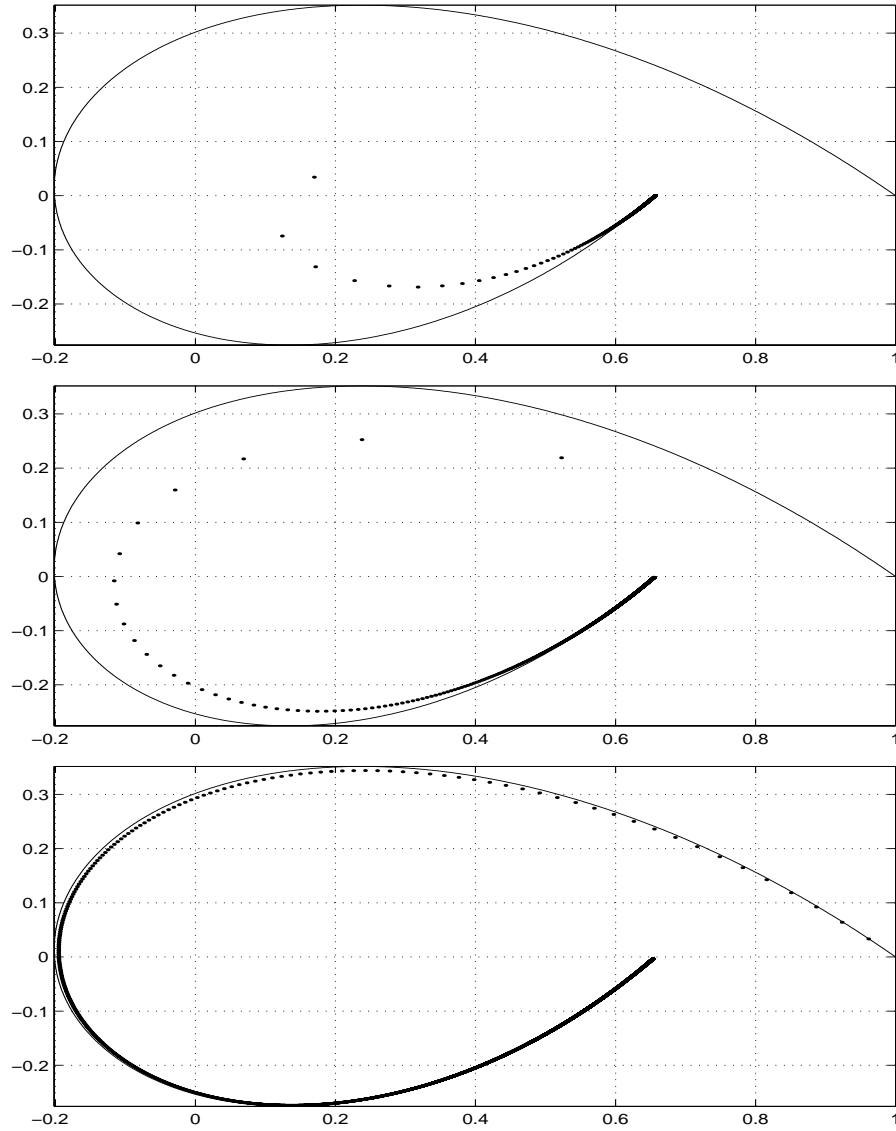


РИСУНОК 1. Последовательность $\gamma_{a,\lambda} = \{\gamma_{a,\lambda}(n)\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ для $\lambda = 0$, $\lambda = 5$ и $\lambda = 100$.

5.1.2. *Кусочно-непрерывные символы.* Пусть $a(\sqrt{r})$ - кусочно-непрерывная функция на $[0, 1]$, имеющая скачки в конечном множестве точек: $r_0 = 0 < r_1 < r_2 < \dots < r_m < 1 = r_{m+1}$. Введем множество

$$J_j(a) = \{z \in \mathbb{C} : z = a(\sqrt{r}), r \in [r_j + 0, r_{j+1} - 0]\}.$$

Пусть $I_j(a)$ - прямолинейные отрезки в \mathbb{C} с концевыми точками $a(\sqrt{r_j - 0})$ и $a(\sqrt{r_j + 0})$. Обозначим

$$\tilde{R}(a) = \left(\bigcup_{j=0}^m J_j(a) \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^m I_j(a) \right) = \text{Range } a \cup \left(\bigcup_{j=1}^m I_j(a) \right).$$

Теорема 18. Пусть $a(\sqrt{r})$ - кусочно-непрерывная функция, как и выше. Тогда

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \text{sp } T_a^{(\lambda)} = M_\infty(a) = \tilde{R}(a).$$

Возникновение прямолинейных сегментов, соединяющих односторонние пределы в точках разрыва символа вполне типично в теории операторов Теплица с кусочно - непрерывными символами, действующими на пространствах Харди или Бергмана (см. например, [2, 11]). Принципиальное отличие нашего случая состоит в следующем. В упомянутой ситуации прямолинейные сегменты возникают в существенном спектре оператора Теплица. В нашем случае каждый оператор Теплица является компактным возмущением единичного оператора, то есть $T_a^{(\lambda)} = a(1)I + K$, и его существенный спектр состоит из одной точки $a(1)$ для всех λ . Для каждого фиксированного λ спектр оператора Теплица совпадает с дискретным множеством (последовательностью $\{\gamma_{a,\lambda}(n)\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$) с предельной точкой $a(1)$. Тенденция формирования прямолинейных сегментов возникает при больших значениях λ и сами сегменты появляются только в предельном множестве.

Проиллюстрируем этот эффект на кусочно-непрерывном символе (см. Рисунок 2)

$$a(r) = \begin{cases} e^{-i\pi r^2}, & r \in [0, 1/\sqrt{2}], \\ e^{i\pi r^2}, & r \in (1/\sqrt{2}, 1]. \end{cases}$$

Еще один интересный пример кусочно-непрерывного символа также иллюстрируется ниже в гиперболическом случае.

Для L^∞ - символов кроме априорной информации (11) мы, очевидно, имеем

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \text{sp } T_a^{(\lambda)} = M_\infty(a) \subset \text{conv}(\text{ess-Range } a).$$

В то же время структура множества $M_\infty(a)$ внутри $\text{conv}(\text{ess-Range } a)$ может быть существенно различной. С учетом теорем 17, 18 можно привести примеры символов, для которых

$$\begin{aligned} M_\infty(a) &= \text{Range } a, \\ M_\infty(a) &= \text{conv}(\text{ess-Range } a), \\ M_\infty(a) &\subset \partial \text{conv}(\text{Range } a), \\ M_\infty(a) &= \partial \text{conv}(\text{Range } a). \end{aligned}$$

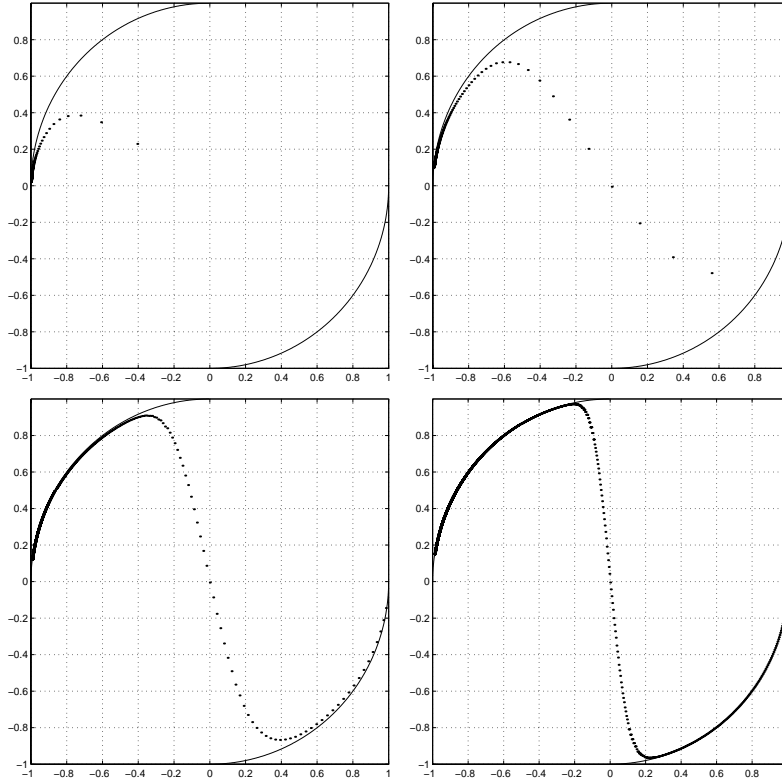


РИСУНОК 2. Последовательность $\gamma_{a,\lambda} = \{\gamma_{a,\lambda}(n)\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ для $\lambda = 0$, $\lambda = 4$, $\lambda = 40$ и $\lambda = 200$.

5.1.3. Неограниченные символы.

Теорема 19. Пусть $a(\sqrt{r}) \in L^1(0, 1)$. Тогда

$$M_\infty(a) \subset \text{conv}(\text{ess-Range } a).$$

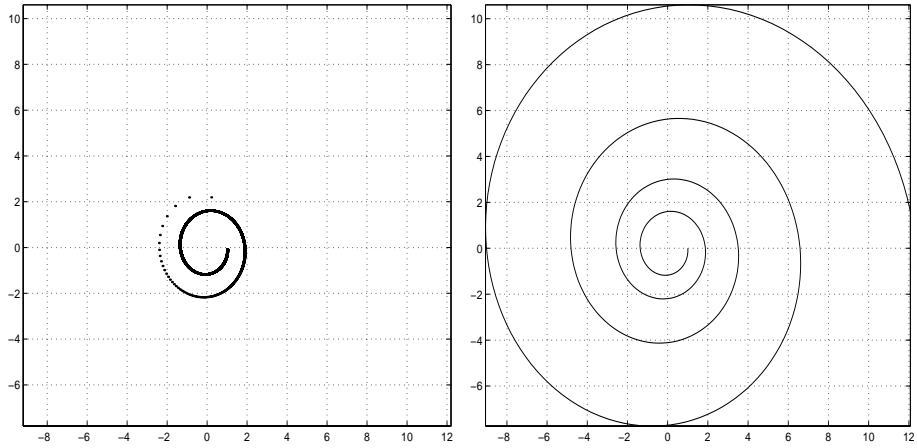
Если, кроме того, $a(\sqrt{r}) \in L^1(0, 1) \cap C[0, 1)$, то

$$\text{Range } a \subset M_\infty(a).$$

Проиллюстрируем теорему на примере символа $a(\sqrt{r}) = r^{i-\alpha}$, $\alpha \in (0, 1)$. Для данного символа имеет место представление

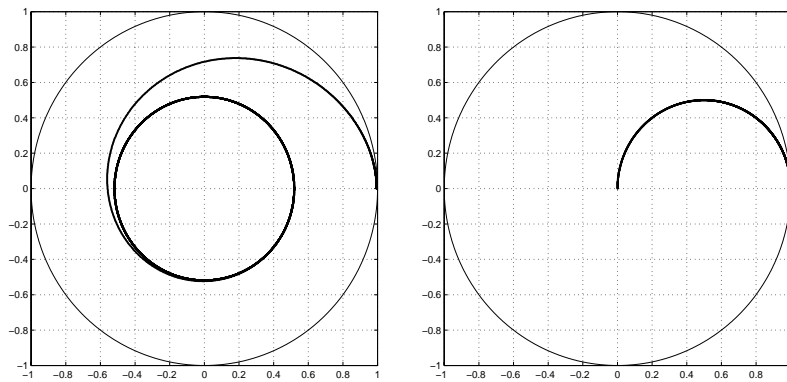
$$\gamma_{a,\lambda}(n) = \left(1 + \frac{\lambda+1}{n+1}\right)^{\alpha-i} \left(1 + O\left(\frac{1}{n+1}\right) + O\left(\frac{1}{n+\lambda}\right)\right).$$

Фиксируя $u \in (0, 1)$, всегда можно выбрать λ и n так, чтобы $\left(1 + \frac{\lambda+1}{n+1}\right) = u^{-1}$. В этом случае $M_\infty(a) = \text{Range } a$ (см. рисунок ниже).

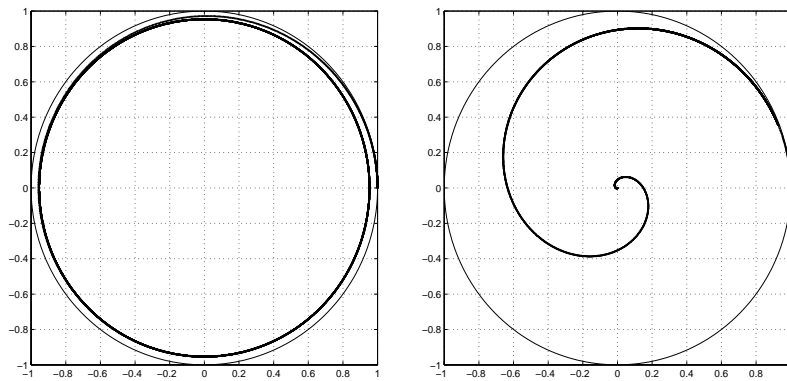


Последовательность $\gamma_{a,\lambda} = \{\gamma_{a,\lambda}(n)\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ для $\lambda = 100000$ и предельное множество $M_\infty(a)$.

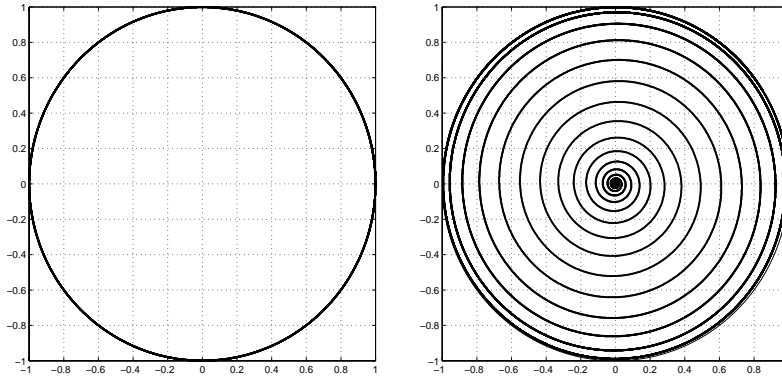
5.2. Параболический случай. Как было отмечено, мы опускаем формулировки соответствующих теорем и остановимся на некоторых примерах. С учетом специфики данного случая покажем, что не только разрывы, но также и скорость осцилляции влияет на вид предельного множества.



Функции $\gamma_{a_1,\lambda}(x)$ и $\gamma_{a_2,\lambda}(x)$ для $\lambda = 0$.



Функции $\gamma_{a_1,\lambda}(x)$ и $\gamma_{a_2,\lambda}(x)$ для $\lambda = 10$.



Функции $\gamma_{a_1, \lambda}(x)$ и $\gamma_{a_2, \lambda}(x)$ для $\lambda = 1000$.

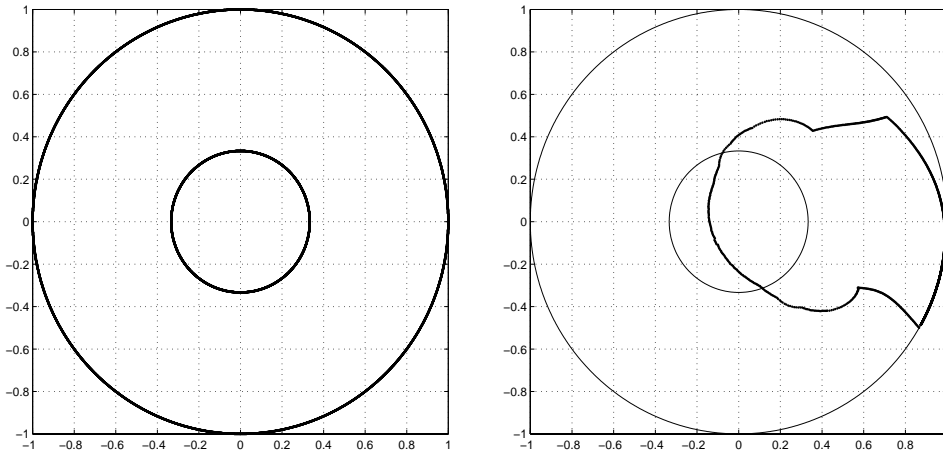
Рассмотрим два типа осцилляции (сильную и слабую) на примере следующих символов $a_1(t) = (1 + 2t)^i = e^{i \ln(1+2t)}$, $a_2(t) = e^{i2t}$, $t \in [0, +\infty)$.

Тогда $\text{Range } a_1 = \mathbb{T}$, $M_\infty(a_1) = \mathbb{D}$ и $\text{Range } a_2 = \mathbb{T}$, $M_\infty(a_2) = \mathbb{T}$ соответственно (см. рисунок).

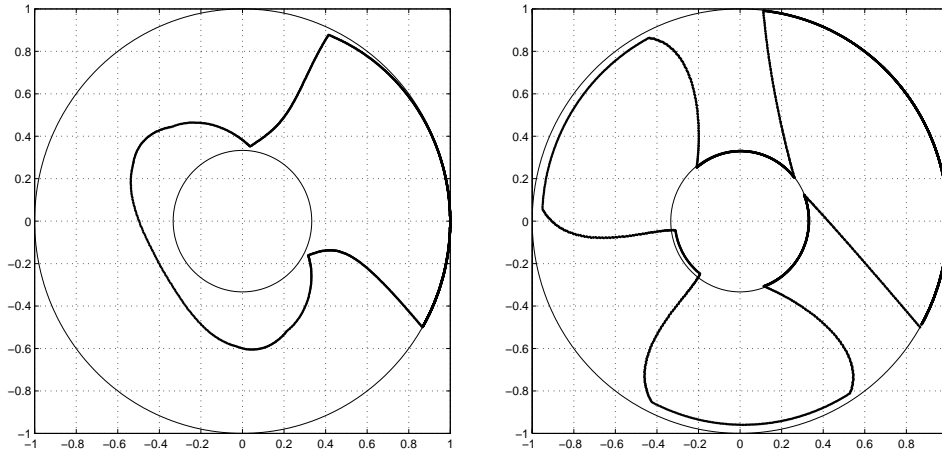
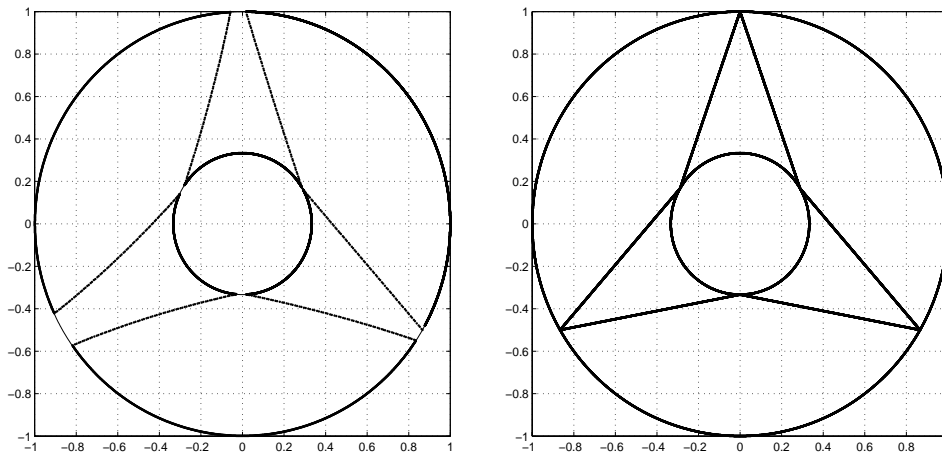
5.3. Гиперболический случай. Здесь мы проиллюстрируем кусочно-непрерывный случай на следующем примере символа:

$$a(\theta) = \begin{cases} \exp\{i[-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} \frac{7\theta}{\pi}]\}, & \theta \in [0, \frac{\pi}{7}) \\ \frac{1}{3} \exp\{i[-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} (\frac{7\theta}{\pi} - 1)]\}, & \theta \in [\frac{\pi}{7}, \frac{2\pi}{7}) \\ \exp\{i[-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} (\frac{7\theta}{\pi} - 1)]\}, & \theta \in [\frac{2\pi}{7}, \frac{3\pi}{7}) \\ \frac{1}{3} \exp\{i[-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} (\frac{7\theta}{\pi} - 2)]\}, & \theta \in [\frac{3\pi}{7}, \frac{4\pi}{7}) \\ \exp\{i[-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} (\frac{7\theta}{\pi} - 2)]\}, & \theta \in [\frac{4\pi}{7}, \frac{5\pi}{7}) \\ \frac{1}{3} \exp\{i[-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} (\frac{7\theta}{\pi} - 3)]\}, & \theta \in [\frac{5\pi}{7}, \frac{6\pi}{7}) \\ \exp\{-i\frac{\pi}{6}\}, & \theta \in [\frac{6\pi}{7}, \pi] \end{cases}$$

Представим образ символа $a = a(\theta)$ и образ $\gamma_{a, \lambda}$ для следующих значений λ : 1, 10, 70 и 500, а также предельное множество $M_\infty(a)$.



Символ $a(\theta)$ и функция $\gamma_{a, \lambda}$ для $\lambda = 1$.

Функция $\gamma_{a,\lambda}$ для $\lambda = 10$ и $\lambda = 70$.Функция $\gamma_{a,\lambda}$ для $\lambda = 500$ и предельное множество $M_\infty(a)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ф.А.Березин, *Метод вторичного квантования*, Наука, Москва, 1988.
- [2] И.Ц. Гохберг, Н.Я. Крупник, *Алгебра, порожденная одномерными сингулярными интегральными операторами с кусочно-непрерывными коэффициентами*, Функци. Анал. и Прилож. **4(3)** (1970), 26–36.
- [3] S.M. Grudsky, N.L. Vasilevski, *Bergman-Toeplitz operators: radial component influence*, Integral Equations Operator Theory, **40(1)** (2001), 16–33.
- [4] S.M. Grudsky, A.N. Karapetyants, N.L. Vasilevski, *Toeplitz operators on the unit ball in \mathbb{C}^n with radial symbols*, J. Operator Theory, **49:2** (2003), 325–346.
- [5] S.M. Grudsky, A.N. Karapetyants, N.L. Vasilevski, *Dynamics of properties of Toeplitz operators with radial symbols*, Integral Equations Operator Theory, **50:2** (2004), 217–253.
- [6] S.M. Grudsky, A.N. Karapetyants, N.L. Vasilevski, *Dynamics of properties of Toeplitz operators on the upper half plane: parabolic case*, J. Operator Theory, **52:1** (2004), 185–214.
- [7] S.M. Grudsky, A.N. Karapetyants, N.L. Vasilevski, *Dynamics of properties of Toeplitz operators on the upper half plane: hyperbolic case*, Bol. Soc. Mat. Mexicana, **(3)10:1** (2004), 119–138.
- [8] R. Hagen, S. Roch, B. Silbermann, *C^* -Algebras and numerical analysis*, Marcel Dekker, Inc., New York, Basel, 2001.

- [9] Н. Hedenmalm, В. Korenblum, К. Zhu. *Theory of Bergman spaces*, Springer Verlag, New York, Inc., 2000.
- [10] S. Klimek, A. Lesniewski. *Quantum Riemann surfaces I. The unit disk*, Commun. Math. Phys., **146** (1992), 103–122.
- [11] Н.Л. Василевский, *Банаховы алгебры, порожденные двумерными интегральными операторами с ядром Бергмана и кусочно-непрерывными коэффициентами. I*, Известия вузов. Математика, **285:2** (1986), 12–21.
- [12] N. L. Vasilevski, *Bergman space structure, commutative algebras of Toeplitz operators and hyperbolic geometry*, Integral Equations Operator Theory, **46** (2003), 235–251.
- [13] N. L. Vasilevski, *Toeplitz operators on the Bergman spaces: inside-the-domain Effects*, Contemporary Mathematics, **289** (2001), 79–146.
- [14] K. Zhu, *Positive Toeplitz operators on weighted Bergman space*, J. Operator Theory, **20** (1988), 329–357.

ВАСИЛЕВСКИЙ НИКОЛАЙ ЛЕОНИДОВИЧ
CENTRO DE INVESTIGACION Y DE ESTUDIOS AVANZADOS
AV. INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL, 2508, COL. SAN PEDRO ZACATENCO
07360, MEXICO, D.F., MEXICO
E-mail address: nvasilev@math.cinvestav.mx

ГРУДСКИЙ СЕРГЕЙ МИХАЙЛОВИЧ
CENTRO DE INVESTIGACION Y DE ESTUDIOS AVANZADOS
AV. INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL, 2508, COL. SAN PEDRO ZACATENCO
07360, MEXICO, D.F., MEXICO
E-mail address: grudsky@math.cinvestav.mx

КАРАПЕТЯНЦ АЛЕКСЕЙ НИКОЛАЕВИЧ
РОСТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
УЛ. МИЛЬЧАКОВА 8-А
344090, РОСТОВ-НА-ДОНУ, РОССИЯ
E-mail address: alexeyk@aanet.ru